de Rham cohomology の入口

1 導入

このページの核心は、微分形式の閉じている条件と完全である条件の差から、空間の穴を検出することである。

2 用語と定義

closed form は、$d\omega = 0$ を満たす形式である。
exact form は、ある形式 η により $\omega = d\eta$ と書ける形式である。

3 方針

$d^2 = 0$ により、exact form は必ず closed form である。逆が常に成立するとは限らない。その失敗を測る対象が de Rham cohomology である。
局所では、closed form は原始関数を持つことが多い。しかし大域では、穴を一周する積分が残る場合がある。de Rham cohomology は、この局所と大域の差を形式の言語で記録する。

4 punctured plane の例

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ で

$$\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

を考える。この 1 形式は原点を除いた領域で closed である。しかし単位円 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ に沿って積分すると

$$\int_\gamma \omega = 2\pi$$

である。もし $\omega = d\eta$ と書けるなら、閉曲線に沿う積分は 0 になるはずである。したがって ω は exact ではない。
閉じていることは、直接計算でも確認できる。$\omega = Pdx + Qdy$ とおくと、

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

であり、原点を除く領域で $Q_x - P_y = 0$ となる。したがって $d\omega = 0$ である。それにもかかわらず単位円の積分が 2π であるため、exact ではない。

5 S^1 の直感

円 S^1 には一周する穴の情報がある。closed form は局所的には微分として表現できるが、一周したときの積分が残ると大域的な原始関数は存在しない。この差が H^1 の直感である。

S^1 では、一周する向きに沿う 1 形式の積分が基本的な不変量になる。穴がなければ閉曲線は面の境界として縮められ、Stokes 定理により closed form の積分は 0 になる。穴があるため、この縮約が妨げられる。

6 直感的な説明

穴のない領域では、局所的な循環が 0 なら大域的なポテンシャルを期待できる。穴のある領域では、局所的に curl が 0 であっても閉曲線に沿う積分が 0 にならない場合がある。

7 反例としての全平面

$\mathbb{R}^2$ 全体では、原点を囲む円も円板の境界である。滑らかな closed 1 形式を円に積分すると、Stokes 定理により円板での $d\omega$ の積分になり、0 である。punctured plane では原点が欠落しているため、その円板を領域内に取れない。この差が位相の情報である。

8 広げすぎない範囲

このページでは群や層の一般論へは進行しない。入口として必要なのは、closed と exact の差が空間の穴を検出する、という一点である。具体例を基準にしてから、必要に応じて抽象化へ進行する。

9 関連リンク

→ 講義 **線積分と保存場** lecture math vector-calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/vector-calculus/線積分と保存場-講義/